המסלול האקדמי המכללה למינהל

בית הספר מדעי המחשב

ת.ז הסטודנט:_____

מס׳ חדר:_____ מס׳ נבחן:_____

<u>מבחן בקורס</u>: מתמטיקה בדידה 1

<u>קוד נושא:</u> 617011

<u>תאריך הבחינה</u>: 20/01 שעה 16:00

<u>שנה״ל:</u> תשע״ט <u>סמסטר</u>: א׳ <u>מועד</u>: א׳

שמות המרצים: ד״ר לודה מרקוס-אפשטיין, ד״ר יפית נתני, ד״ר לואי ג׳נינגס, יוליאן טננהאוזר

שמות המתרגלים: מתן דוגוט, גלעד קוגן, דניאלה קוזאק, דור ניסים, יוליאן טננהאוזר

משך הבחינה: 3 שעות

<u>מספר חלקים בבחינה</u>: 2

<u>הוראות לנבחנים:</u>

- **במבחן 2 חלקים:**

<u>חלק א׳</u> – שאלות פתוחות –3 שאלות פתוחות (בסה״כ בחלק זה 40 נקודות)

א. משקל כל שאלה מצוין בגוף השאלה
ב. יש לענות על כל השאלות **באותה מחברת הבחינה**
ג. יש לנמק בפירוט את תשובותיך. על תשובה לא מפורטת יורדו נקודות.

<u>חלק ב׳</u> – שאלות ברירה – 10 שאלות ברירה (בסה״כ בחלק זה 60 נקודות)

א. משקל כל שאלה – 6 נקודות
ב. יש למלא **בכתב יד ברור** במקומות המיועדים **בחציו הימני של דף הקידוד** את שם ביה״ס, חדר המבחן, מספר הנבחן, שם הקורס, תאריך הבחינה, שם המרצה, מספר תעודת הזהות (מספר בן תשע ספרות, כולל ספרת ביקורת ועם אפס מקדים באם נדרש) ואת מספר השאלון (המופיע בצדו השמאלי העליון של השאלון)
ג. *** **חשוב מאוד**:
בדף הקידוד יש לרשום ולקדד את מספר השאלון מימין לשמאל (להוסיף אפסים משמאל במידת הצורך).
ד. בכל שאלה יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר ולסמנה במקום המיועד בצדו השמאלי של דף הקידוד, **<u>בעט שחור או כחול בלבד ובאופן ברור ומודגש</u>**
ה. אין לסמן את התשובות על גבי דף הקידוד במַדְגֵּשׁ (מַרְקֶר) זוהר!
ו. רק דף הקידוד ייבדק!

- יש לענות על כל השאלות

- הבחינה עם חומר עזר– מצורף מטה דף נוסחאות

- שימוש במחשבון כיס : כן – מחשבון **ללא צג גרפי**

- לא נדרש להחזיר את טופס המבחן

בהצלחה !!!

דפי נוסחאות
זהויות (שקילויות) לוגיות יסודיות

	שם הזהות (השקילות) הלוגית	הזהות (השקילות) הלוגית
1	טאוטולוגיה בסיסית	$p \vee (\neg p) \equiv T$
2	סתירה בסיסית	$p \wedge (\neg p) \equiv F$
3	כלל הזהות	$p \vee F \equiv p \equiv p \wedge T$
4	כללי השליטה	$p \vee T \equiv T \ , \ p \wedge F \equiv F$
5	כלל הכפילות	$p \vee p \equiv p \equiv p \wedge p$
6	שלילה כפולה	$\neg(\neg p) \equiv p$
7	כללי החילוף (קומוטטיביות)	$p \vee q \equiv q \vee p \ , \ p \wedge q \equiv q \wedge p$
8	כללי הקיבוץ (אסוציאטיביות)	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
9	כללי הפילוג (דיסטריבוטיביות)	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
10	כלל הבליעה	$p \vee (p \wedge q) \equiv p \equiv p \wedge (p \vee q)$
11	כללי דה-מורגן (D.M)	$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$
12	״חוק/כלל הגרירה״	$p \rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$

13	"חוק/כלל גרירה כפולה"	$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

כללי היסק בתחשיב הפסוקים

	שם כלל ההיסק	כלל ההיסק
.1	Modus Ponens (M.P)	$(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$
.2	Modus Tollens (M.T)	$(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$
.3	Hypothetical Syllogism (H.S)	$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r$
.4	Disjunctive Syllogism (D.S)	$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$
.5	Addition	$p \Rightarrow p \vee q$
.6	Simplification	$p \wedge q \Rightarrow p$
.7	Resolution	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \Rightarrow q \vee r$

<u>זהויות (שקילויות) לוגיות בסיסיות בתחשיב הפרדיקטים</u>

יהיו $P(x)$, $Q(x)$ פרדיקטים (אונאריים) מעל תחום $D_x \neq \varnothing$, ויהי $P(x,y)$ פרדיקט (בינארי) מעל התחומים : $D_x \neq \varnothing$, $D_y \neq \varnothing$.

	שם כלל ההיסק	כלל ההיסק
.1	Universal Instantiation (U.I)	$\forall x : P(x) \Rightarrow P(x_1)$ for an **arbitrary** x_1
.2	Universal Generalization (U.G)	$P(x_1)$ for an **arbitrary** $x_1 \Rightarrow \forall x : P(x)$
.3	Existential Instantiation (E.I)	$\exists x : P(x) \Rightarrow P(x_1)$ for **some (specific)** element x_1
.4	Existential Generalization (E.G)	$P(x_1)$ for **some (specific)** element $x_1 \Rightarrow \exists x : P(x)$
.5		$\forall x : P(x) \Rightarrow \exists x : P(x)$
.6		$\forall x : P(x) \wedge Q(x) \equiv \forall x : P(x) \wedge \forall x : Q(x)$
.7		$\exists x : P(x) \vee Q(x) \equiv \exists x : P(x) \vee \exists x : Q(x)$
.8	כללי דה-מורגן (D.M)	$\neg\forall x : P(x) \equiv \exists x : \neg P(x)$ $\neg\exists x : P(x) \equiv \forall x : \neg P(x)$ $\neg\forall x\forall y : P(x,y) \equiv \exists x\exists y : \neg P(x,y)$ $\neg\forall x\exists y : P(x,y) \equiv \exists x\forall y : \neg P(x,y)$ $\neg\exists x\forall y : P(x,y) \equiv \forall x\exists y : \neg P(x,y)$ $\neg\exists x\exists y : P(x,y) \equiv \forall x\forall y : \neg P(x,y)$
.9	חילופיות $\forall$	$\forall x\forall y : P(x,y) \equiv \forall y\forall x : P(x,y)$
.10	חילופיות $\exists$	$\exists x\exists y : P(x,y) \equiv \exists y\exists x : P(x,y)$
.11	Universal Modus Ponens (U.M.P)	יהי $x_1 \in D_x$ **ספציפי**. מתקיים : $(\forall x : P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(x_1) \Rightarrow Q(x_1)$
.12	Universal Modus Tollens (U.M.T)	יהי $x_1 \in D_x$ **ספציפי**. מתקיים : $(\forall x : P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \neg Q(x_1) \Rightarrow \neg P(x_1)$

חוקי תורת הקבוצות

תהיינה : A, B, C קבוצות כלשהן החלקיות לקבוצה אוניברסלית U נתונה.

1. ***איחוד:***

$1.1: A\cup\varnothing = A\ ,\ A\cup A = A$

$1.2: A\cup B = B\cup A\ ,\ A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$

$1.3: A\subseteq A\cup B\ ,\ B\subseteq A\cup B$

$1.4: A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B = B$

2. ***חיתוך:***

$2.1: A\cap\varnothing = \varnothing\ ,\ A\cap A = A$

$2.2: A\cap B = B\cap A\ ,\ A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$

$2.3: A\cap B\subseteq A\ ,\ A\cap B\subseteq B$

$2.4: A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B = A$

3. ***חוקי פילוג (ביחס לאיחוד-חיתוך):***

$3.1: (A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$

$3.2: (A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$

4. ***חוקי הבליעה:***

$A\cup(A\cap B) = A = A\cap(A\cup B)$

5. ***הקבוצה האוניברסלית והמשלים:***

$5.1: \overline{U} = \varnothing\ ,\ \overline{\varnothing} = U\ ,\ \overline{\overline{A}} = A$

$5.2: A\cup\overline{A} = U\ ,\ A\cap\overline{A} = \varnothing$

6. ***הפרש:***

$6.1: \overline{A} = U\setminus A\ ,\ A\setminus\varnothing = A$

$6.2: A\setminus A = \varnothing\ ,\ \varnothing\setminus A = \varnothing$

$6.3: A\setminus B = A\cap\overline{B}$

$6.4: A\subseteq B \Leftrightarrow A\setminus B = \varnothing$

$6.5: A\cap B = \varnothing \Leftrightarrow A\setminus B = A$

7. ***חוקי דה-מורגן:***

$7.1: \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$7.2: \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

8. *<u>הפרש סימטרי:</u>*

$8.1: A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$8.2: A \Delta B = B \Delta A \ , \ A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

$8.3: A \Delta \varnothing = A \ , \ A \Delta A = \varnothing$

<u>חלק א׳ – שאלות פתוחות:</u> (<u>ניקוד</u> : 40 נקודות) **יש לענות על כל השאלות**

<u>שאלה 1:</u> [15 נק׳]

<u>הוכיחו</u> : תהי (A,R) קס״ח. אזי (A,R) קס״ה אם״ם היא קס״מ וקמ״מ.

<u>שאלה 2:</u> [15 נק׳]

נגדיר יחס S מעל $\mathbb{R}^2$ באופן הבא :

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 : \left((a,b)S(c,d) \ \leftrightarrow \ a^3 - c^3 = b - d\right).$$

1) [6 נק׳] הוכיחו כי R הוא יחס שקילות מעל $\mathbb{R}^2$.

2) [6 נק׳] מצאו את מחלקות השקילות $[(0,0)]_S$, $[(1,1)]_S$, $[(2,2)]_S$.

האם כל המחלקות הללו שוות זו לזו? אם כן, <u>נמקו</u>. אם לא, רשמו מהן המחלקות השוות ומהן המחלקות השונות <u>ונמקו</u>.

3) [3 נק׳] מצאו את קבוצת המנה $\mathbb{R}^2 / S$.

<u>תארו במפורט (ובאופן מתמטי) את איברי קבוצת המנה.</u>

<u>שאלה 3:</u> [10 נק׳]

הוכיחו תוך שימוש בעקרון האינדוקציה המתמטית כי לכל $2 \le n \in \mathbb{N}$ מתקיים :

בכל שורה של n כדורים אדומים וירוקים המתחילה בכדור אדום ומסתיימת בכדור ירוק יש בהכרח שני כדורים סמוכים מצבעים שונים (כלומר, יש כדור אדום הנמצא בסמוך לכדור הירוק).

חלק ב' – שאלות סגורות: (ניקוד : $6\cdot 10=60$ נקודות)

לפניך 10 שאלות ברירה. בכל שאלה עליך לסמן את התשובה הנכונה מבין 4 האפשרויות הרשומות.

שאלה מספר 1:

איזו מהטענות הבאות בְּהֶכְרֵחַ נכונה?

1. $(p\leftrightarrow q)\wedge(q\leftrightarrow r)\Rightarrow(p\leftrightarrow r)$
2. $(p\wedge(q\vee r))\wedge(q\oplus r)\wedge p\Rightarrow r$
3. $(p\oplus q)\wedge(q\oplus r)\Rightarrow(p\oplus r)$
4. $(p\uparrow q)\wedge(q\uparrow r)\Rightarrow(p\uparrow r)$

שאלה מספר 2:

יהיו $A\equiv(p\downarrow r)\rightarrow(q\downarrow r),\quad B\equiv p\wedge\neg q\wedge r$.

איזו מהטענות הבאות היא הטענה הנכונה?

1. צורת CNF המלאה של A היא $p\vee\neg q\vee r$
2. צורת CNF המלאה של A היא $(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$
3. $A\vee B$ טאוטולוגיה
4. $A\wedge B$ סתירה

שאלה מספר 3:

ההצרנה של הפסוק "אין מספר זוגי גדול ביותר" היא:

1. $\forall x((x\in\mathbb{Z}\wedge 2\mid x)\rightarrow\exists y\ (y\in\mathbb{Z}\wedge 2\mid y\wedge\ y>x))$
2. $\forall x((x\in\mathbb{Z}\wedge 2\mid x)\wedge\exists y\ (y\in\mathbb{Z}\wedge 2\mid y\wedge\ y>x))$
3. $\neg\exists x((x\in\mathbb{Z}\wedge 2\mid x)\rightarrow\forall y\ (y\in\mathbb{Z}\wedge 2\mid y\wedge\ y\le x))$
4. $\neg\exists x((x\in\mathbb{Z}\wedge 2\mid x)\wedge\forall y\ (y\in\mathbb{Z}\wedge 2\mid y\wedge\ y\le x))$

שאלה מספר 4:

הנוסח השקול לוגית לפסוק

$$\neg\left(\forall x\ \exists y\left(\left(x\in\mathbb{N}\ \wedge\ y\in\mathbb{N}\wedge\ x>y\right)\ \rightarrow\ \exists z\left(z\in\mathbb{R}\wedge\ z\neq y+x\right)\right)\right)$$

הוא:

1. $\exists x\,\forall y\left(\left(x\in\mathbb{N}\ \wedge\ y\in\mathbb{N}\wedge\ x>y\right)\ \wedge\ \forall z\left(z\notin\mathbb{R}\vee\ z=y+x\right)\right)$
2. $\exists x\,\forall y\left(\left(x\in\mathbb{N}\ \wedge\ y\in\mathbb{N}\wedge\ x>y\right)\ \rightarrow\ \forall z\left(z\notin\mathbb{R}\vee\ z=y+x\right)\right)$
3. $\exists x\,\forall y\left(\left(x\notin\mathbb{N}\ \vee\ y\notin\mathbb{N}\vee x\leq y\right)\ \wedge\ \exists z\left(z\notin\mathbb{R}\vee\ z=y+x\right)\right)$
4. $\exists x\,\forall y\left(\left(x\notin\mathbb{N}\ \vee\ y\notin\mathbb{N}\vee x\leq y\right)\ \rightarrow\ \forall z\left(z\notin\mathbb{R}\vee\ z=y+x\right)\right)$

שאלה מספר 5:

תהי $P(n)$ טענה כלשהי לגבי מספר טבעי n.

באיזה מהמקרים הבאים הטענה $P(n)$ נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$.

1. $P(1)\wedge\forall k\in\mathbb{N}\left(P(k)\rightarrow P(2k-1)\wedge P(2k)\wedge P(2k+1)\right)$
2. $P(1)\wedge\forall k\in\mathbb{N}\left(P(k)\rightarrow P(4k-1)\wedge P(4k)\wedge P(4k+1)\right)$
3. $P(1)\wedge P(2)\wedge P(3)\wedge\forall k\in\mathbb{N}\left(P(k)\rightarrow P(4k-1)\wedge P(4k)\wedge P(4k+1)\right)$
4. $P(1)\wedge P(2)\wedge\forall k\in\mathbb{N}\left(P(k)\rightarrow P(4k-1)\wedge P(4k)\wedge P(4k+1)\right)$

שאלה מספר 6:

הַשְׁלִימוּ: על מנת שיתקיים: R_1, R_2 שני יחסי סדר מעל A _____ שיתקיים: $R_1\cap R_2$ יחס סדר מעל A. סמנו את התשובה הנכונה.

1. הכרחי
2. מספיק
3. הכרחי ומספיק
4. לא הכרחי ולא מספיק

שאלה מספר 7:

נגדיר יחס R מעל $\mathbb{N}$ באופן הבא:

$$\forall a,b\in\mathbb{N}\ \left(aRb \leftrightarrow |a-3|<|b-3|\right).$$

איזו מהטענות הבאות היא הטענה הנכונה?

1. R הוא יחס אנטי-רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי מעל $\mathbb{N}$
2. R הוא יחס אנטי-רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי מעל $\mathbb{N}$
3. R הוא יחס רפלקסיבי, אנטי-סימטרי ואינו טרנזיטיבי מעל $\mathbb{N}$
4. R הוא יחס אנטי-רפלקסיבי, אנטי-סימטרי ואינו טרנזיטיבי מעל $\mathbb{N}$

שאלה מספר 8:

תהי $X=P(\{1,2\})\setminus\{\varnothing\}$. נגדיר יחס סדר S מעל $X\times X$ באופן הבא:

$$\forall (A,B),\ (C,D)\in X\times X:\ \left((A,B)S(C,D) \leftrightarrow A\subseteq C \wedge D\subseteq B\right).$$

איזו מהטענות הבאות **אינה** הנכונה?

1. ב- $X\times X$ יש 5 איברים מינימליים
2. אורך קס״ח $(X\times X,\ \sim)$ שווה 3
3. רוחב קס״ח $(X\times X,\ \sim)$ שווה 4
4. ב- $X\times X$ יש 2 איברים מינימליים

שאלה מספר 9:

תהיינה A, B, C קבוצות כלשהן.

איזו מהטענות הבאות בהכרח נכונה?

1. $(A\times B)\cup(A\times C)=A\times(B\cup C)$
2. $(A\cup B)\Delta(A\cup C)=A\cup(B\Delta C)$
3. $(A\cup B)\times(A\cup C)=A\cup(B\times C)$
4. $(A\Delta B)\cup(A\Delta C)=A\Delta(B\cup C)$

שאלה מספר 10:

תהיינה A, B, C קבוצות כלשהן.

איזו מהטענות הבאות **אינה** הנכונה?

1. אם $A \subseteq B \cup C$ אז $P(A) \subseteq P(B) \cup P(C)$
2. אם $A \subseteq B \cap C$ אז $P(A) \subseteq P(B) \cap P(C)$
3. אם $P(A) \subseteq P(B) \cup P(C)$ אז $A \subseteq B \cup C$
4. אם $P(A) \subseteq P(B) \cap P(C)$ אז $A \subseteq B \cap C$

--- סוף המבחן ---